ISEG
Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto
2.º Ano/2.º Semestre
2024/2025

Aulas Teórico-Práticas N.º 18 e 19 (Semana 10)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 3)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 4 a 7)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Revisões e Distribuições de Amostragem	• **Capítulo 2**: Estimação	• **Capítulo 3**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 4**: Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1

Testes de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão (Amostras Independentes)

Teste para a Diferença de Valores Médios (2 Amostras Independentes)

O **teste para 2 amostras independentes** também é conhecido como teste *t* não-emparelhado

- Permite a **comparação de dois valores médios** usando amostras representativas de duas populações independentes.
- Os indivíduos são escolhidos **aleatoriamente** da população.
- As duas amostras são **independentes**.
- Deve-se saber se as **variâncias** são aproximadamente **iguais** (homocedasticidade) ou **não** (heterocedasticidade).
- **Suposição deste teste é**: A variável de interesse deve ter distribuição **Normal** em cada uma das populações (das quais as amostras foram recolhidas).

Nota: Geralmente, as variâncias são desconhecidas, mas também existem testes de hipóteses para o caso das variâncias serem conhecidas.

IC para μ_1-μ_2: Formulário

Variância corrigida

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$ Variâncias Conhecidas	$Z = \dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r = \dfrac{\left(\dfrac{s_1'^2}{m}+\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\left(\dfrac{s_1'^2}{m}\right)^2+\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
Variâncias Desconhecidas e Iguais	$T = \dfrac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	Variâncias Desconhecidas e Diferentes
Variância	$\dfrac{nS^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\dfrac{S_1'^2}{S_2'^2}\,\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

IC para μ_1-μ_2: Formulário

- **GRANDES AMOSTRAS**

Caso geral

Média	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Variâncias Conhecidas

Variâncias Desconhecidas

Estatísticas de Teste t para a Diferença de Valores Médios (2 Amostras Independentes)

- **Variâncias iguais e desconhecidas:**

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

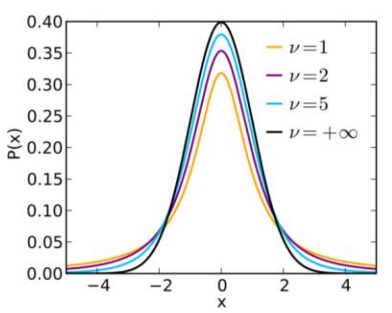
s: desvio padrão conjunto

- **Variâncias diferentes e desconhecidas:**

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$\nu = \frac{[(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)]^2}{[(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)]}$$

Nota: Esta variável T tem distribuição t-Student com v graus de liberdade (g.l.´s). O valor dos g.l.´s é calculado através desta fórmula, sendo arredondado para baixo para o inteiro mais próximo.



Nos primeiros 6 meses de vida dois grupos aleatórios de crianças seguiram esquemas de alimentação diferentes: o grupo 1 seguiu o esquema A e o grupo 2 seguiu o esquema B. No quadro seguinte apresentam-se os ganhos em peso, em kg, dessas crianças.

Grupo 1	2,7	3,2	3,6	4,1	2,7	3,2	4,5	3,6	2,7
Grupo 2	4,1	4,5	3,6	2,7	3,6	3,2	4,1		

Sabe-se que as crianças dos dois grupos tinham, ao nascer, aproximadamente pesos iguais.

Admita que as distribuições dos pesos seguem a distribuição Normal com variâncias 0,36 e 0,32, respectivamente.

a) Ao nível de significância de 1%, poderá afirmar que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A é:
   i. Igual ao das crianças alimentadas segundo o esquema B?
   ii. Superior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B?
   iii. Inferior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B?

b) A partir de que nível de significância rejeita cada uma das hipóteses anteriores?

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa o ganho em peso, em kg, das crianças alimentadas segundo o esquema A,
- X_2 a v.a. que representa o ganho em peso, em kg, das crianças alimentadas segundo o esquema B,

com $X_1 \sim N\left(\mu_1 =?\,; \sigma_1 = \sqrt{0,36}\right)$ e $X_2 \sim N\left(\mu_2 = ?; \sigma_2 = \sqrt{0,32}\right)$.

$n_1 = 9, \qquad \overline{x}_1 = 3,3367;$

$n_2 = 7, \qquad \overline{x}_2 = 3,6857.$

a) $\alpha = 1\%$.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para μ$_1$ - μ$_2$ (Variâncias Conhecidas)

i) $\mu_1 = \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \; vs \; H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral).

Estatística de teste:

Estatística de Teste:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1).$$

$$z_{obs} = \frac{(3{,}3667 - 3{,}6857) - 0}{\sqrt{\frac{0{,}36}{9} + \frac{0{,}32}{7}}} = -1{,}0896.$$

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}995} = 2{,}576$.

Logo, $R.A.:]-2{,}576;\ 2{,}576[$ e $R.R.:]-\infty;\ -2{,}576] \cup [2{,}576; +\infty[$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja diferente do das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (ii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

ii) $\mu_1 > \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \ vs. H_1: \mu_1 > \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \ vs. H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ (teste unilateral direito).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0; 1).$$

Decisão (pela região de rejeição):

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $z_{obs} = -1{,}0896$.

Pela tabela $z_{1-\alpha} = z_{0,99} = 2{,}326$. Logo, $R.A.:]-\infty;\ 2{,}326[$ e $R.R.: [2{,}326; +\infty[$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja superior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (iii): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Conhecidas)

Hipóteses:

iii) $\mu_1 < \mu_2$?

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \; vs \; H_1: \mu_1 < \mu_2$

$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ (teste unilateral esquerdo).

Estatística de Teste:

Estatística de teste: $Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1)$.

Decisão (pela região de rejeição):

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $z_{obs} = -1{,}0896$.

Pela tabela $z_{1-\alpha} = z_{0,99} = 2{,}326$. Logo, $R.A.:]-2{,}326; +\infty[$ e $R.R.:]-\infty; -2{,}326]$.

Como $z_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 1%, não existe evidência estatística de que o ganho médio em peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja inferior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b) (i) e (ii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

b) valor $p = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) = P(Z_{obs} \in R.R. | \mu = \mu_0)$.

i) valor $p = 2 \times P(Z \geq |z_{obs}|) = 2 \times P(Z \geq 1{,}0896) = 2 \times \big(1 - \Phi(1{,}0896)\big)$
$= 2 \times (1 - 0{,}8621) = 0{,}2758$.

Decisão (pela valor-p):

A hipótese $H_0: \mu_1 = \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 27,58%, logo não é rejeitada para qualquer nível de significância usual em investigação: não existe evidência estatística de que o ganho médio de peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja diferente do das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ii) valor $p = P(Z \geq z_{obs}) = P(Z \geq -1{,}0896) = 1 - \Phi(-1{,}0896)$
$= 1 - \big(1 - \Phi(1{,}0896)\big) = \Phi(1{,}0896) = 0{,}8621$.

Decisão (pela valor-p):

Alternativa, com base no valor p bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 3{,}3367 - 3{,}6857 > 0$ dá uma proposição falsa. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = 1 - \frac{0{,}2758}{2} = 0{,}8621.$$

A hipótese $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 86,21%. Assim, não existe evidência estatística de que o ganho médio de peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja superior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b) (iii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Conhecidas)

Decisão (pela valor-p):

iii) $valor\ p = P(Z \leq z_{obs}) = P(Z \leq -1{,}0896) = \Phi(-1{,}0896) = 1 - \Phi(1{,}0896)$
$= 1 - 0{,}8621 = 0{,}1379.$

Alternativa, com base no valor p bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 3{,}3367 - 3{,}6857 > 0$ dá uma proposição verdadeira. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = \frac{0{,}2758}{2} = 0{,}1379.$$

A hipótese H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 13,79%: não existe evidência estatística de que o ganho médio de peso das crianças alimentadas segundo o esquema A seja inferior ao das crianças alimentadas segundo o esquema B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

31. Uma repartição de Finanças tem dois funcionários a receber declarações de IRS. Admita que o tempo que cada funcionário leva a atender uma pessoa tem distribuição normal, com desvios padrões iguais a 2 minutos. O Sr. Antunes, ao chegar para entregar a sua declaração, nota que a fila junto ao balcão *A* tem 20 pessoas, enquanto a fila junto ao balcão *B* tem 15 pessoas, e opta, naturalmente, por esta. Ao começar a ser atendido (um hora e quinze minutos depois) repara que a vigésima pessoa da fila ao lado tinha justamente acabado de ser atendida. Pode afirmar-se que o tempo médio gasto pelos dois funcionários a atender uma pessoa é idêntico? (Considere as dimensões 0.05 e 0.1).

Exercício 31

$X_i \equiv$ tempo (em minutos) que o funcionário i demora a atender uma pessoa $(i = A, B)$.

$X_A \sim N(\mu_A, 2^2)$ $\quad n_A = 20 \quad \bar{x}_A = \frac{75}{20} = 3.75$

$X_B \sim N(\mu_B, 2^2)$ $\quad n_B = 15 \quad \bar{x}_B = \frac{75}{15} = 5$

$H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ VS $H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0$

$\alpha_1 = 0.05 \quad \alpha_2 = 0.1$

Exercício 31

Estatística - teste:

$$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - (\mu_{A_0} - \mu_{B_0})}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim N(0,1)$$

sob H_0,

$$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim N(0,1)$$

$$z_{obs} = \frac{3.75 - 5}{\sqrt{\frac{2^2}{20} + \frac{2^2}{15}}} \simeq -1.83$$

Exercício 31

$$P_{obs} = 2P(Z > |z_{obs}|) = 2P(Z > 1.83) =$$

$$= 2(1 - \Phi(1.83)) = 2(1 - 0.9664) =$$

$$= 0.0672$$

Conclusão:

$P_{obs} > \alpha_1 = 0.05$ não se rejeita H_0.

$P_{obs} < \alpha_2 = 0.1$ rejeita-se H_0.

Testes de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

2

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão
(Amostras Independentes)

Um determinado método de análise permite determinar o conteúdo de enxofre no petróleo bruto. Os ensaios efectuados em 10 e 8 amostras aleatórias de 1 kg de petróleo bruto, provenientes de furos pertencentes respectivamente aos campos A e B, revelaram os seguintes resultados (em gramas):

Campo A:	111	114	105	112	107	109	112	110	110	106
Campo B:	109	103	101	105	106	108	110	104		

a) Ao nível de significância de 10%, poderá afirmar que, em média, quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A é:
   i. Igual à do campo B?
   ii. Superior à do campo B?
   iii. Inferior à do campo B?

b) Calcule o $valor\ p$ associado a cada um dos testes anteriores.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A,
- X_2 a v.a. que representa a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo B.

Nada é referido sobre a distribuição de X_1 e X_2.

$n_1 = 10, \quad \bar{x}_1 = 109{,}6 \quad \text{e} \quad s_1 = 2{,}875,$
$n_2 = 8, \quad \bar{x}_2 = 105{,}75 \quad \text{e} \quad s_2 = 3{,}105.$

a) $\alpha = 10\%$.

i) $\mu_1 = \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral).

Para saber decidir qual a estatística de teste a utilizar, é preciso validar os pressupostos subjacentes:

- Normalidade:

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

- Igualdade das variâncias:

O I. C. a 90% para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ é dado por:

$$\left]\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1;n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{n_2-1;n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right[.$$

Ver Tabela no Slide a seguir

Substituindo os valores, sendo $F_{9;\,7;0,95} = 3{,}68$ e $F_{7;\,9;0,95} = 3{,}29$, obtém-se:

$$\left]\frac{2{,}875^2}{3{,}105^2}\times\frac{1}{3{,}68};\frac{2{,}875^2}{3{,}105^2}\times 3{,}29\right[=]0{,}2332;2{,}8230[.$$

Como 1 pertence ao intervalo obtido, ao nível de significância de 10% não há evidências de que σ_1^2 seja diferente de σ_2^2. Portanto, pode-se considerar que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Cálculo do Quantil da Distribuição F-Snedecor de Probabilidade 1-α/2 e com n1 e n2 g.l.´s

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

$F_{9;\,7;0,95} = 3{,}68$ e $F_{7;\,9;0,95} = 3{,}29$,

n – graus de liberdade do denominador	ε	m - graus de liberdade do numerador																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.95	248.02	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.32
	.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	976.72	984.87	993.08	997.27	1001.40	1005.60	1009.79	1014.04	1018.26
	.010	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6106.68	6156.97	6208.66	6234.27	6260.35	6286.43	6312.97	6339.51	6365.59
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
	.010	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.41	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31

Exercício (a) (i): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Estatística de Teste:

Deste modo, a estatística de teste a usar é:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2=10+8-2=16}.$$

$$t_{obs} = \frac{(109{,}6 - 105{,}75) - 0}{\sqrt{\frac{(10-1)2{,}875 + (8-1)3{,}105}{10+8-2}}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}} = 2{,}7255.$$

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n_1+n_2-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{16\,;\,0{,}95} = 1{,}746.$

Logo, $R.A.:]-1{,}746;\ 1{,}746[$ e $R.R.:]-\infty;\ -1{,}746] \cup [1{,}746; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 10%, existe evidência estatística de que, em média, a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A é diferente da do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (ii): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

ii) $\mu_1 > \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 > \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ (teste unilateral direito).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2=10+8-2=16}.$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 2{,}7255$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n_1+n_2-2;\,1-\alpha} = t_{16;\,0{,}90} = 1{,}337$.
Logo, $R.A.:]-\infty;\ 1{,}337[$ e $R.R.: [1{,}337; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 10%, existe evidência estatística de que, em média, a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A é superior à do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a) (iii): Teste de Hipóteses para μ$_1$ - μ$_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Hipóteses:

iii) $\mu_1 < \mu_2$?

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \; vs \; H_1: \mu_1 < \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ (teste unilateral esquerdo).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2=10+8-2=16}.$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 2{,}7255$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n_1+n_2-2;\,1-\alpha} = t_{16\,;\,0{,}90} = 1{,}337$.
Logo, $R.A.:]-1{,}337; +\infty[$ e $R.R.:]-\infty;\, -1{,}337]$.

Como $t_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 10%, não existe evidência estatística de que, em média, a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A seja inferior à do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Decisão (pela valor-p):

b) valor $p = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) = P(Z_{obs} \in R.R. | \mu = \mu_0)$.

i) valor $p = 2 \times P(T \geq |t_{obs}|) = 2 \times P(T \geq 2{,}7255) = 2 \times \left(1 - P(T < 2{,}7255)\right)$
$= 2 \times (1 - 0{,}9925) = 0{,}015$.

A hipótese H_0: $\mu_1 = \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 1,5%. Logo, para um nível de significância de 5% existe evidência de que o teor médio de enxofre no campo A é diferente do campo B, mas para 1% essa afirmação já não pode ser sustentada. Repare-se que o $valor\ p$ calculado é o valor indicado no quadro de resultados do SPSS anteriormente apresentado.

ii) valor $p = P(T \geq t_{obs}) = P(T \geq 2{,}7255) = 1 - P(T < 2{,}7255) = 1 - 0{,}9925 = 0{,}0075$.
Alternativa, com base no $valor$-p bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 109{,}6 - 105{,}75 > 0$ dá uma proposição verdadeira. Logo,

$$valor\text{-}p_{uni} = \frac{0{,}015}{2} = 0{,}0075.$$

A hipótese H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 0,75%. Assim, para qualquer nível de significância sensato/usual ($\leq 10\%$) existe evidência de que o teor médio de enxofre no campo A é superior ao do campo B.

iii) valor $p = P(T \leq t_{obs}) = P(T \leq 2{,}7255) = 0{,}9925$.
Alternativa, com base no $valor$-p bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 109{,}6 - 105{,}75 > 0$ dá uma proposição falsa. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} = 1 - \frac{0{,}015}{2} = 0{,}9925.$$

A hipótese H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância superiores ou iguais a 99,25. Assim, existe não existe evidência de que o teor médio de enxofre no campo A seja inferior ao do campo B.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

34. Dois programas de alimentação de gado bovino são comparados. A variável aleatória X representa o aumento de peso (em kg) de um animal alimentado segundo o programa 1, durante um mês, enquanto Y traduz o aumento de peso (em kg) de um animal alimentado segundo o programa 2, durante igual período de tempo. Sabe-se que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, e que as variáveis são independentes.
Um grupo de 8 animais foi submetido ao primeiro programa durante um mês, tendo-se obtido

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 416 \text{ e } \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 21807.$$

Outro grupo de 10 animais foi submetido ao segundo programa durante um mês, tendo-se obtido

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 468 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 22172.$$

a) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre as variâncias.
b) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre os valores médios supondo variâncias iguais.
c) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre os valores médios supondo variâncias diferentes.
d) Qual dos procedimentos adoptados nas alíneas anteriores, para testar a igualdade de médias, lhe parece mais adequado?

Exercício 34

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\qquad$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$n_1 = 8$ $\qquad$ $n_2 = 10$

$\sum_{i=1}^{8} x_i = 416$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{10} y_i = 468$

$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 21807$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 22172$

Exercício 34 b)

b) $\alpha = 0.05$ $\qquad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

sob H_0,
$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) \Big/ \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1'^2 + (n_2-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(\underbrace{m+n-2}_{\to 16})$$

$$t_{obs} = \frac{(416/8) - (468/10) \Big/ \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}}}{\sqrt{\frac{(7 \times 25) + (9 \times 29.96)}{16}}} \simeq 2.0795$$

Exercício 34 b)

$$W = \left\{ t_{obs} : |t_{obs}| > t_{16,\,0.025} \right\} = \left\{ t_{obs} : |t_{obs}| > 2.120 \right\}$$

$t_{obs} = 2.0795 \notin W$ logo não se rejeita H_0 ao nível de 0.05.

Testes de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

3

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão
(Amostras Independentes)

Para um estudo sobre a caracterização da altura da população portuguesa, foi recolhida uma amostra de 1861 pessoas, com as seguintes características: (conjunto de dados semelhante ao disponibilizado no Capítulo 12, mas com uma amostra de maior dimensão):

Group Statistics

	Sexo	N	Mean	Std. Deviation
Altura	Masculino	853	168,46	7,617
	Feminino	1007	158,48	6,652

Supondo a Normalidade das distribuições e assumindo que as variâncias populacionais são desconhecidas e diferentes, verifique se se pode considerar que as alturas médias dos homens e das mulheres são iguais, com 95% de confiança.

a) Suspeita que em média a altura dos homens não é igual à das mulheres. Teste esta hipótese ao nível de significância de 5%.
b) Calcule o valor p associado ao teste da alínea anterior.
c) Teste a hipótese de a média da altura dos homens ser superior à das mulheres, ao nível de significância de 0,5%?
d) Determine o valor p associado ao teste anterior.
e) Ao nível de significância de 2,5%, pode-se afirmar que em média a altura dos homens é superior à das mulheres?
f) A partir de que nível de significância é rejeitada a hipótese do teste anterior?

Exercício (a): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a altura dos homens,
- X_2 a v.a. que representa a altura das mulheres,

com $X_1 \sim N(\mu_1 =?\,; \sigma_1 =?)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = ?; \sigma_2 =?)$, mas $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

$n_1 = 853, \quad \overline{x}_1 = 168{,}46 \quad \text{e} \quad s_1 = 7{,}617,$
$n_2 = 1007, \quad \overline{x}_2 = 158{,}48 \quad \text{e} \quad s_2 = 6{,}652.$

a) $\alpha = 5\%$, $\mu_1 \neq \mu_2$?

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \; vs H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \; vs \; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (teste bilateral).

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} t_v, \text{ onde } v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right].$$

$$t_{obs} = \frac{(168{,}46 - 158{,}48) - 0}{\sqrt{\frac{7{,}617^2}{853} + \frac{6{,}652^2}{1007}}} = 29{,}816.$$

$$v = \left[\frac{\left(\frac{7{,}617^2}{853} + \frac{6{,}652^2}{1007}\right)^2}{\frac{1}{853 - 1}\left(\frac{7{,}617^2}{853}\right)^2 + \frac{1}{1007 - 1}\left(\frac{6{,}652^2}{1007}\right)^2} \right] = [1705{,}6] = 1705.$$

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{v;\, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{1705\,;\,0{,}975} = 1{,}96$.

Logo, $R.A.:]-1{,}96;\; 1{,}96[$ e $R.R.:]-\infty;\; -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 5%, existe evidência estatística de existe diferença significativa entre as médias das alturas dos homens e das mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Decisão (pela valor-p):

b) valor $p = 2 \times P(T \geq |t_{obs}|) = 2 \times P(T \geq 29{,}816) = 2 \times \left(1 - P(T < 29{,}816)\right)$

$$\approx 2 \times (1 - 1) = 0.$$

Logo, aos níveis usuais de significância existe evidência de que a média das alturas dos homens difere das mulheres. Repare-se que o valor p calculado é o valor indicado no quadro de resultados do SPSS anteriormente apresentado.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (c): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Hipóteses:

c) $\alpha = 0{,}5\%$, $\mu_1 > \mu_2$?

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \text{ (teste unilateral direito).}$$

Estatística de Teste:

Estatística de teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} t_v, \text{ onde } v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right].$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 29{,}816$ e $v = 1705$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{v;\,1-\alpha} = t_{1705\,;\,0{,}995} = 2{,}576$.
Logo, $R.A.:]-\infty;\ 2{,}576[$ e $R.R.: [2{,}576; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.R.$ rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 0,5%, existe evidência estatística de que, em média, os homens são mais altos do que as mulheres.

Exercício (d): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Decisão (pela valor-p):

d) valor $p = P(T \geq t_{obs}) = P(T \geq 29{,}816) = 1 - P(T < 29{,}816) \approx 1 - 1 = 0$

Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 168{,}46 - 158{,}48 > 0$ dá uma proposição verdadeira. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} \approx \frac{0}{2} = 0.$$

A hipótese $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância de aproximadamente 0. Assim, para qualquer nível de significância sensato/usual ($\leq 10\%$) existe evidência de que em média os homens são mais altos do que as mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (e): Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Hipóteses:

e) $\alpha = 2{,}5\%$, $\mu_1 < \mu_2$?

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \ vs \ H_1: \mu_1 < \mu_2$$

$$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \ vs \ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \text{ (teste unilateral esquerdo).}$$

Estatística de teste:

Estatística de Teste:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} t_v, \text{ onde } v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} \right].$$

Como a estatística de teste é a mesma da alínea anterior, $t_{obs} = 29{,}816$ e $v = 1705$.

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{v;\,1-\alpha} = t_{1705\,;\,0{,}975} = 1{,}96$.
Logo, $R.A.:]-1{,}96; +\infty[$ e $R.R.:]-\infty;\ -1{,}96]$.

Como $t_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 2,5%, não existe evidência estatística de que, em média, a altura dos homens seja inferior à das mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (f): Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Decisão (pela valor-p):

f) valor $p = P(T \leq t_{obs}) = P(T \leq 29{,}816\,) \approx 1$.

Alternativa, com base no *valor-p* bilateral calculado na alínea i): substituindo em H_1 μ_1 e μ_2 por $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$, respectivamente, $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 168{,}46 - 158{,}48 > 0$ dá uma proposição falsa. Logo,

$$\text{valor } p_{uni} \approx 1 - \frac{0}{2} = 1.$$

A hipótese H_0: $\mu_1 \geq \mu_2$ é rejeitada para níveis de significância de aproximadamente 1. Assim, para qualquer nível de significância sensato/usual ($\leq 10\%$) não existe evidência de que em média a altura dos homens seja inferior à das mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

34. Dois programas de alimentação de gado bovino são comparados. A variável aleatória X representa o aumento de peso (em kg) de um animal alimentado segundo o programa 1, durante um mês, enquanto Y traduz o aumento de peso (em kg) de um animal alimentado segundo o programa 2, durante igual período de tempo. Sabe-se que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, e que as variáveis são independentes.

Um grupo de 8 animais foi submetido ao primeiro programa durante um mês, tendo-se obtido

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 416 \text{ e } \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 21807.$$

Outro grupo de 10 animais foi submetido ao segundo programa durante um mês, tendo-se obtido

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 468 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 22172.$$

a) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre as variâncias.
b) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre os valores médios supondo variâncias iguais.
c) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre os valores médios supondo variâncias diferentes.
d) Qual dos procedimentos adoptados nas alíneas anteriores, para testar a igualdade de médias, lhe parece mais adequado?

Exercício 34

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\quad$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$n_1 = 8$ $\quad$ $n_2 = 10$

$\sum_{i=1}^{8} x_i = 416$ $\quad$ $\sum_{i=1}^{10} y_i = 468$

$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 21807$ $\quad$ $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 22172$

Exercício 34 c)

c) $\alpha = 0.05$ $\qquad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

sob H_0,
$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{n_1} + \frac{S_2'^2}{n_2}}} \sim t(\nu)$$

com
$$\nu = \text{floor}\left(\frac{\left(\frac{s_1'^2}{n_1} + \frac{s_2'^2}{n_2} \right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{s_1'^2}{n_1} \right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{s_2'^2}{n_2} \right)} \right)$$

Exercício 34 c) e d)

Temos $\nu = \text{floor}\left(\dfrac{\left(\frac{25}{8} + \frac{29.96}{10}\right)^2}{\frac{1}{7}\left(\frac{25}{8}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{29.96}{10}\right)^2}\right) = 15$

$$W = \{t_{obs} : |t_{obs}| > t_{15,\,0.025}\} = \{t_{obs} : |t_{obs}| > 2.131\}$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1'^2}{n_1} + \frac{s_2'^2}{n_2}}} = \frac{(416/8) - (468/10)}{\sqrt{\frac{25}{8} + \frac{29.96}{10}}} \simeq 2.10$$

$t_{obs} \notin W$ logo não se rejeita H_0 ao nível de 0.05.

d) O procedimento adotado na alínea b) é mais adequado porque de acordo com o resultado da alínea a) a evidência empírica suporta a hipótese de igualdade de variâncias.

Testes de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão (Amostras Emparelhadas)

4

Hipóteses do Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Amostras Emparelhadas)

Considere-se agora o caso em que as duas amostras formam um par de observações $(X_{1i};\ X_{2i})$, $i = 1, \dots, n$, ou seja, trata-se de uma amostra emparelhada. Os pares de observações são independentes e retirados de populações Normais, com médias μ_1 e μ_2 e desvios padrão σ_1 e σ_2, respectivamente. Neste caso, para testar a igualdade entre as médias populacionais, as hipóteses a formular são:

T. bilateral	T. unilateral direito	T. unilateral esquerdo
Hipóteses a testar: $H_0: \mu_1 = \mu_2 \ vs\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ $\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \ vs$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	**Hipóteses a testar:** $H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \ vs\ H_1: \mu_1 > \mu_2$ $\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \ vs$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$	**Hipóteses a testar:** $H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \ vs\ H_1: \mu_1 < \mu_2$ $\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \ vs$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

Para realizar o teste pretendido calcular:

- $D_i = X_{1i} - X_{2i}, \qquad i = 1, \dots, n;$
- $\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{1i}}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{2i}}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{n};$
- $S_D^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(D_i - \bar{D})^2}{n-1}.$

Ou seja, está-se perante um teste de hipóteses para a média no caso em que a população segue uma distribuição Normal da qual se desconhece a sua variância. Esta situação já foi descrita nos capítulos anteriores (secção 8.3.2).

Desta forma, as hipóteses a testar podem escritas da seguinte forma:

Hipóteses a testar: $H_0: \mu_D = 0 \ vs\ H_1: \mu_D \neq 0$	**Hipóteses a testar:** $H_0: \mu_D \leq 0 \ vs\ H_1: \mu_D > 0$	**Hipóteses a testar:** $H_0: \mu_D \geq 0 \ vs\ H_1: \mu_D < 0$

Um professor de estatística seleccionou aleatoriamente um grupo de 10 alunos, aprovados na disciplina pelo regime de frequências, tendo registado as suas notas nas frequências:

Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1ª freq.	10	11	9	10	18	15	16	13	11	10
2ª freq.	9	12	12	12	18	14	18	12	13	10

Ao nível de significância de 5% pode afirmar que as notas médias dos alunos na 1ª frequência são superiores às obtidas na 2ª frequência? Assuma a Normalidade das notas.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ (Amostras Emparelhadas)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a nota do aluno na 1ª frequência,
- X_2 a v.a. que representa a nota do aluno na 2ª frequência,

com $X_1 \sim N(\mu_1 = ?\,; \sigma_1 = ?)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = ?; \sigma_2 = ?)$.

Hipóteses:

$\alpha = 1\%, \mu_1 > \mu_2$?

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \; vs. H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$\Leftrightarrow H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \; vs. H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

como as amostras são emparelhadas

$$\Leftrightarrow H_0: \mu_D \leq 0 \; vs. H_1: \mu_D > 0 \text{ (teste unilateral direito).}$$

Estatística de teste:

Estatística de Teste:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: Teste de Hipóteses para μ_1 - μ_2 (Amostras Emparelhadas)

Aluno (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1ª freq. (x_{1i})	10	11	9	10	18	15	16	13	11	10
2ª freq. (x_{2i})	9	12	12	12	18	14	18	12	13	10
$d_i = x_{1i} - x_{2i}$	1	-1	-3	-2	0	1	-2	1	-2	0

$n = 10$; $\overline{d} = -0{,}7$ e $s_d = 1{,}4944$.

$$t_{obs} = \frac{-0{,}7 - 0}{\frac{1{,}4944}{\sqrt{10}}} = -1{,}481.$$

Decisão (pela região de rejeição):

Pela tabela $t_{n-1;\,1-\alpha} = t_{9;\,0{,}95} = 1{,}833$. Logo, $R.A.:]-\infty;\ 1{,}833[$ e $R.R.: [1{,}833; +\infty[$.

Como $t_{obs} \in R.A.$ não rejeitar H_0. Portanto, ao nível de significância de 5%, não existe evidência estatística de que as notas médias obtidas pelos alunos na 1ª frequência sejam superiores às da 2ª frequência.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Murteira et al (2015)
Capítulo 8

36. Levou-se a efeito um estudo de uma amostra casual de 25 famílias com o objectivo de determinar qual a reacção dos consumidores a uma série de medidas inseridas numa campanha de poupança energética. Foram noticiados e praticados descontos para certos níveis de redução dos consumos. Observaram-se os consumos energéticos das famílias seleccionadas durante dois meses, um antes e outro depois da campanha, X_1 e X_2 respectivamente, e calculou-se a partir dos registos, para cada família, a diferença dos consumos ($D = X_1 - X_2$) tendo-se obtido uma diferença média de 0.2 kWh e um desvio padrão corrigido (s'_D) de 1 kWh. Suponha que a quantidade de energia consumida mensalmente por uma familia segue uma distribuição normal.

a) Com dimensão de 0.05, que se pode afirmar sobre o êxito da campanha?

b) Se os valores reportados, diferença média de 0.2 kWh e desvio padrão corrigido (s'_D) de 1 kWh, se referissem a uma amostra de 225 famílias, que pode afirmar sobre o êxito da campanha? Comente.

Exercício 36 a)

$X_1 \equiv$ Consumo energético de uma família (antes da campanha) em KWh

$X_2 \equiv$ " " " " " (depois " ") " "

$D = X_1 - X_2 \equiv$ Diferença no consumo de uma família (antes vs depois) da campanha (em KWh).

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$D \sim N\left(\mu_1 - \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\operatorname{cov}(X_1, X_2)\right) = N(\mu_D, \sigma_D^2)$

Amostra casual: $n = 25$ famílias

(X_{1i}, X_{2i}), $i = 1, 2, \dots, 25$: amostra casual emparelhada de $n = 25$ famílias.

$\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \qquad \bar{d} = 0.2 \qquad s'_D = 1$

Exercício 36 a)

a) Campanha tem sucesso se $\mu_1 > \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_2 > 0 \Leftrightarrow \mu_D > 0$

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$ $(\alpha = 0.05)$

(ou $H_0 : \mu_D \leq 0$) vs $H_1 : \mu_D > 0$)

$$T = \frac{\bar{D} - (\mu_1 - \mu_2)}{S'_D / \sqrt{n}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S'_D / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

sob H_0, $T = \dfrac{\bar{D}}{S'_D / \sqrt{n}} \sim t(24)$

$$t_{obs} = \frac{\bar{d}}{s'_D / \sqrt{25}} = \frac{0.2}{1/5} = 1$$

$$W_T = \{ t_{obs} : t_{obs} > t_{24, 0.05} \} = \{ t_{obs} : t_{obs} > 1.711 \}$$

$t_{obs} = 1 \notin W_T$ logo não se rejeita H_0.

Exercício 36 b)

b) Neste caso, sob H_0, teríamos $T \sim t(224)$.

$$t_{obs} = \frac{0.2}{1/\sqrt{225}} = 3$$

$$W_T = \{ t_{obs} : t_{obs} > \underbrace{t_{224,\,0.05}}_{\simeq N(0,1)} \} =$$

$$= \{ t_{obs} : t_{obs} > 1.96 \}$$

$t_{obs} \in W_T$ logo rejeita-se H_0.

Comentário: A dimensão do teste está fixa em 0.05 mas a potência do teste aumenta quando se aumenta o tamanho da amostra. Quanto maior for a potência do teste mais provável é que se rejeite H_0 (se a dimensão do teste estiver fixa). Qualquer desvio em relação ao valor de H_0 pode ser rejeitado, se a amostra for grande o suficiente.

Testes de Hipóteses para σ^2

5

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

Teste de Hipóteses para σ^2: Formulário

Variância corrigida

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$ $T = \dfrac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	$Z = \dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r = \dfrac{\left(\dfrac{s_1'^2}{m}+\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\left(\dfrac{s_1'^2}{m}\right)^2+\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
Variância	$\dfrac{nS^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\dfrac{S_1'^2}{S_2'^2}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

Exercício:

Considere-se uma amostra de dimensão $n = 9$ e variância $s^2 = 100$. Realize um Teste de Hipóteses para testar se o desvio padrão populacional é superior a 4 para o nível de significância $\alpha = 1\%$.

Exercício: Teste de Hipóteses para σ^2

Hipóteses:

Passo 0
+
Passo 1

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad n = 9 \quad s^2 = 100$

$H_0: \sigma = 4$ $\quad \alpha = 1\%$

$H_1: \sigma > 4$

$E(X) = \mu$

$Var(X) = \sigma^2$

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício: Teste de Hipóteses para σ^2

Estatística de Teste:

(2) p/ σ^2

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

Passo 2

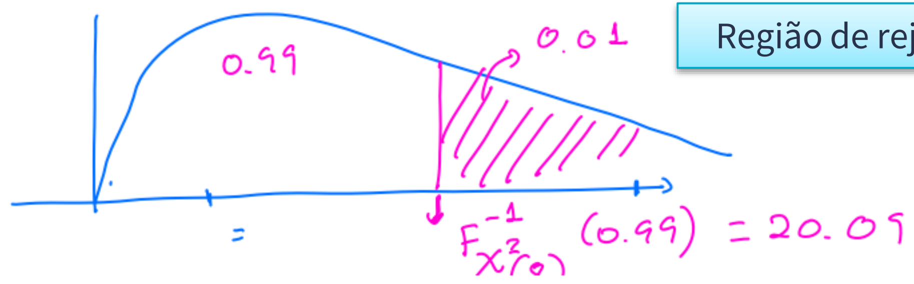
v. aleat. $T = \frac{8\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(8)}$ $\quad \cancel{\frac{6\times 25}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(6)}}$

est. Teste $T_0 = \frac{8\,S^2}{16}$

valor observado $t_0 = \frac{8 \times 100}{16} = 50$

Exercício: Teste de Hipóteses para σ^2

Decisão (pela região de rejeição):



Região de rejeição RR = [20,09; +∞[

Como $t_0 = 50 > 20.09$, então H0 deve ser rejeitada para $\alpha = 1\%$.

para $\alpha \geq 1\%$

Decisão:

Rejeita-se H0 para α = 1%.

Existe evidência estatística para afirmar que o desvio padrão populacional é superior a 4 para α = 1%.

Cálculo dos Quantis da Distribuição Qui-Quadrado de Probabilidade 1-α e com n-1 g.l.´s

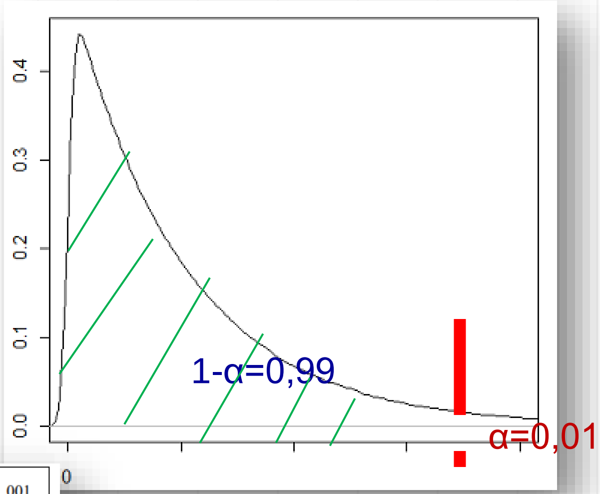
Nível de confiança (1-α=0,99)

Nível de significância (α=0,01)

Área total é igual a 1

O nível de significância é $\alpha = 0{,}01$

Logo, pretende-se calcular o quantil da distribuição Qui-Quadrado de probabilidade 1-α = 0,99
$\chi^2_{0,99;8} = 20{,}09$ (ver tabela)



$\chi^2_{0,99;8} = 20{,}09$

$$\chi^2_{n.\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n.\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

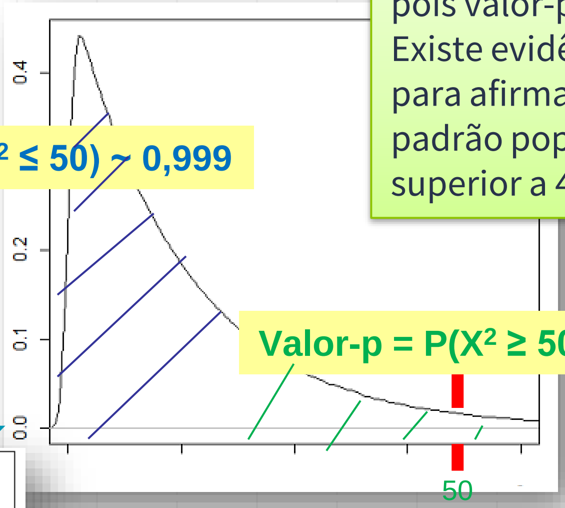
Regra de decisão pelo valor-p:
Valor-p = $P(X^2 \geq VOE) < \alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0 para α

Cálculo do Valor-p quando a Estatística de Teste tem Distribuição Qui-Quadrado

Decisão (pelo valor-p):

valor-p = $P(X^2 \geq 50) \sim P(X^2 \geq 26{,}124) = 0{,}001$
(ver a tabela)

Área total é igual a 1



$P(X^2 \leq 50) \sim 0{,}999$

Valor-p = $P(X^2 \geq 50) \sim 0{,}001$

Decisão:
Rejeita-se H0 para $\alpha = 1\%$, pois valor-p ~ 0,001 < 0,01. Existe evidência estatística para afirmar que o desvio padrão populacional é superior a 4 para $\alpha = 1\%$.

$\chi^2_{n,\varepsilon} : P(X > \chi^2_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$

n \ ε	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.827
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.815
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	.207	.297	.484	.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.466
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.457
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588

Obrigada!

Questões?